Mit den gemessenen Selbstdiffusions-Koeffizienten D und den bekannten Viskositäten η [19, 20] lassen sich Beziehungen zwischen beiden Transportkoeffizienten nachprüfen. Wir beschränken uns auf die wichtige STOKES–EINSTEIN-Beziehung

$$D = (k\,T)/(6\,\pi\,\eta\,a) \tag{4}$$

(a Molekülradius, k BOLTZMANN-Konstante).

Für den Molekülradius setzen wir bei Wasser [17] 1,4 Å, bei Benzol 2,4 Å; der letztere Wert entspricht dem in Abb. 7 angenommenen Verhältnis V/V_0. Die mit Gl. (4) berechneten Werte von D sind in Abb. 5 und 6 gestrichelt eingetragen und zeigen in ihrer Temperaturabhängigkeit ausgezeichnete Übereinstimmung mit den Meßwerten; die Absolutwerte liegen dagegen um etwa 30% zu tief. Bringt man jedoch an Gl. (4) die gebräuchlichen Mikrokorrekturen [21–23] an, indem man η durch $\eta' \approx 0{,}6 \ldots 0{,}8\,\eta$ ersetzt, so läßt sich auch zwischen den Absolutwerten von Gl. (4) und den Meßergebnissen von Abb. 5 und 6 völlige Übereinstimmung erzielen.

Unser Dank gilt Herrn Prof. Dr. H. O. KNESER, der diese Arbeit ermöglicht und gefördert hat. Die Arbeit wurde durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft maßgeblich unterstützt.

[20] J. D'ANS u. E. LAX, Taschenbuch für Chemiker und Physiker, Springer, Berlin 1943, S. 1095.
[21] A. GIERER u. K. WIRTZ, Z. Naturforschg. **8 a**, 532 [1953].
[22] E. MCLAUGHLIN, Trans. Faraday Soc. **55**, 28 [1959].
[23] G. HOUGHTON, J. Chem. Phys. **40**, 1628 [1964].

Die Methode der Korrelationsfunktion in der Theorie der Supraleitung

II. Linearisierte GINZBURG–LANDAU-Gleichung, Diffusionsnäherung

GERHART LÜDERS

Institut für Theoretische Physik der Universität Göttingen

(Z. Naturforschg. 21 a, 1415—1425 [1966]; eingegangen am 7. April 1966)

The method of correlation function is, without complete justification, extended to superconductors in the presence of a magnetic field. Applying this method, we derive the linearized and generalized GINZBURG–LANDAU equation and DE GENNES' diffusion approximation in a simple way. The results agree with those obtained previously by DE GENNES, GORKOV, MAKI, TEWORDT, and others. In special cases (no magnetic field, pure superconductor or isotropic scattering) they can also be derived from WERTHAMER's kernel. In connection with this kernel, we discuss the limits of validity of both the linearized and generalized GINZBURG–LANDAU equation and of the diffusion approximation.

1. Einleitende Diskussion

Die Sprungtemperatur T_c eines Supraleiters und der Verlauf der Lückenfunktion $\Delta(\boldsymbol{r})$ können bei einem Übergang zweiter Ordnung aus einer linearen Integralgleichung für $\Delta(\boldsymbol{r})$

$$\Delta(\boldsymbol{r}) = g\,T_c \int d^3\boldsymbol{r}' \sum_\omega K_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\,\Delta(\boldsymbol{r}') \tag{1}$$

bestimmt werden. Hierbei ist g die Kopplungskonstante der BCS-Theorie und ω durchläuft alle positiven und negativen ungeradzahligen Vielfachen von πT_c; die BOLTZMANN-Konstante ist gleich eins gesetzt. Die Funktion $K_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ bzw. deren räumliche FOURIER-Transformierte

$$K_\omega(q) = \int K_\omega(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\cdot\exp\{-i\,\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\}\,d^3\boldsymbol{r} \tag{2}$$

wurde von WERTHAMER [1] nach einer Methode von ABRIKOSOV und GORKOV [2] berechnet für einen unendlich ausgedehnten Leiter mit statistisch homogener Verteilung der Störatome und isotropem Streuquerschnitt. Das Ergebnis ist

$$K_\omega(q) = \frac{2\,\pi\,N}{v}\left[\frac{q}{\tan^{-1}\zeta_\omega\,q} - \frac{1}{l}\right]^{-1}. \tag{3}$$

Dabei ist N die Termdichte an der FERMI-Kante, v die FERMI-Geschwindigkeit und l die freie Weglänge der Elektronen. Die Größe ζ_ω ist definiert durch

$$1/\zeta_\omega = 1/\xi_\omega + 1/l \tag{4}$$

mit

$$\xi_\omega = v/2\,|\omega|\,. \tag{5}$$

Der Fall sauberer Supraleiter ($1/l = 0$, $\zeta_\omega = \xi_\omega$) ist hierin enthalten. WERTHAMERS Resultat läßt sich sehr

[1] N. R. WERTHAMER, Phys. Rev. **132**, 2440 [1963].
[2] A. A. ABRIKOSOV u. L. P. GORKOV, Zh. Eksperim. Teor. Fiz. **35**, 1558 [1958]; engl. Übersetzung: Soviet Phys.—JETP **8**, 1090 [1959].

einfach aus einer Weiterentwicklung von DE GENNES'[3] Methode der Korrelationsfunktion erhalten, wie in einem Zusatz zur ersten Arbeit[4] dieser Reihe gezeigt wurde.

Die rechte Seite von Gl. (3) kann formal in eine Reihe nach Potenzen von q bzw. q^2 entwickelt werden

$$K_\omega(q) = \frac{\pi N}{|\omega|}\left(1 - \frac{\xi_\omega \zeta_\omega}{3} q^2 + \dots\right). \tag{6}$$

Nach Ausführung der inversen FOURIER-Transformation erhält man eine Summe von Ableitungen der DIRACschen Deltafunktion

$$K_\omega(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = \frac{\pi N}{|\omega|}\left(1 + \frac{\xi_\omega \zeta_\omega}{3} \partial_j \partial_j + \dots\right)\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'). \tag{7}$$

Dabei ist ∂_j eine Abkürzung für $\partial/\partial x_j$; außerdem wird über doppelt vorkommende Komponenten-Indizes summiert. In Gegenwart eines Magnetfeldes mit dem Vektorpotential $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ wird der Differentialoperator ∂_j ersetzt durch den eichinvarianten Operator

$$\tilde{\partial}_j = \partial_j + 2\, i\, e\, A_j(\boldsymbol{r}) \tag{8}$$

(GAUSSsches Maßsystem mit $c=1$, $\hbar=1$). Bei den in Gl. (6) nicht angeschriebenen Termen mit höheren Potenzen von q^2 muß allerdings beachtet werden, daß die verschiedenen Komponenten des Operators $\tilde{\partial}$ nicht miteinander vertauschbar sind. Man darf nicht einfach die Ersetzung $q_j \to -i\,\tilde{\partial}_j$ vornehmen, sondern hat die richtige Reihenfolge zu wählen; das ist seit einer Arbeit von TEWORDT[5] bekannt.

Die Richtigkeit der Behauptungen des vorangehenden Absatzes (formale Ersetzbarkeit von q durch Differentialoperatoren bzw. eichinvariante Differentialoperatoren) wird sich aus den Untersuchungen der Abschn. 2 bis 4 im Rahmen der Methode der Korrelationsfunktion ergeben. Dabei werden wir auch automatisch die richtige Reihenfolge der eichinvarianten Differentialoperatoren erhalten.

Zunächst soll aber daran erinnert werden, daß aus der Reihenentwicklung Gl. (7) nach Einsetzen in Gl. (1) die linearisierte GINZBURG–LANDAU-Gleichung[6] im Sinne der mikroskopischen Ableitung durch GORKOV[7] bzw. deren Verallgemeinerung (q^4-Glieder bei TEWORDT[5], allgemein für den Grenzfall schmutziger Supraleiter bei MAKI[8, 9]) folgt

$$\Delta(\boldsymbol{r}) = 2\pi N g T_c \left[\sum_\omega \frac{1}{2|\omega|} + \frac{v^2}{3}\sum_\omega \frac{1}{(2|\omega|)^2\,(2|\omega|+v/l)}\,\tilde{\partial}_j\tilde{\partial}_j + \dots\right]\Delta(\boldsymbol{r}) \tag{9}$$

mit Summation über positive und negative ω (wie stets in dieser Arbeit). Die Elektron-Elektron-Wechselwirkung ist retardiert; deswegen sind die ω-Summen abzuschneiden. Tatsächlich ist das nur bei der ersten, ohne Abschneiden divergenten Summe erforderlich. Man ersetzt

$$2\pi N g T_c \sum_\omega \frac{1}{2|\omega|} - 1 \to N g \ln(T_{c0}/T_c), \tag{10}$$

was sich unter Benutzung der Gleichung für die Sprungtemperatur T_{c0} des homogenen Supraleiters ohne Magnetfeld leicht begründen läßt. So erhält man schließlich aus Gl. (9)

$$\left[\ln\left(\frac{T_{c0}}{T_c}\right) + \frac{2\pi T_c v^2}{3}\sum_\omega \frac{1}{(2|\omega|)^2\,(2|\omega|+v/l)}\,\tilde{\partial}_j\tilde{\partial}_j + \dots\right]\Delta(\boldsymbol{r}) = 0. \tag{11}$$

Die Ersetzung des nichtlokalen Integralkerns $K_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ durch eine Reihenentwicklung bezüglich Differentialoperatoren ist höchstens erlaubt bei Anwendung auf eine genügend langsam veränderliche Funktion. Für Abschätzungen der Zulässigkeit denkt man sich in Gl. (3) bzw. in der entsprechenden Reihenentwicklung die Größe $1/q$ ersetzt durch eine Länge, auf der sich $\Delta(\boldsymbol{r})$ wesentlich ändert. Für den

[3] P. G. DE GENNES, Rev. Mod. Phys. **36**, 225 [1964].

[4] G. LÜDERS, Z. Naturforschg. **21 a**, 680 [1966]. Obwohl die Arbeit einen etwas anderen Titel trägt, soll sie als erste dieser Reihe angesehen werden. Sie wird im folgenden mit I zitiert. Eine Gleichung, die mit (I. x) bezeichnet wird, bedeutet Gl. (x) dieser Arbeit.

[5] L. TEWORDT, Z. Phys. **180**, 385 [1964]. Die Arbeit beschränkt sich nicht auf $\Delta(\boldsymbol{r}) \to 0$.

[6] V. L. GINZBURG u. L. D. LANDAU, Zh. Eksperim. Teor. Fiz. **20**, 1064 [1950]; deutsche Übersetzung: Phys. Abh. Sowjetunion, Folge **1**, S. 1, Leipzig 1958.

[7] L. P. GORKOV, Zh. Eksperim. Teor. Fiz. **36**, 1918 [1959]; engl. Übersetzung: Soviet Phys.—JETP **9**, 1364 [1959]; Zh. Eksperim. Teor. Fiz. **37**, 1407 [1959]; engl. Übersetzung: Soviet Phys.—JETP **10**, 998 [1960].

[8] K. MAKI, Physics **1**, 21 [1964].

[9] Die Arbeit von MAKI[8] beschränkt sich nicht auf $\Delta(\boldsymbol{r}) \to 0$.

„sauberen“ Leiter ($1/l = 0$, $\zeta_\omega = \xi_\omega$) erhält man aus Gl. (3) eine Reihenentwicklung nach Potenzen von $(\xi_\omega\, q)^2$. Der Integralkern kann durch eine Reihe ersetzt und diese Reihe dann im Sinne der GINZBURG–LANDAU-Gleichung [Gl. (11)] durch die ersten Glieder approximiert werden, wenn $(\xi_\omega\, q)^2 \ll 1$ ist. Das ist aber nur in der Nähe der Sprungtemperatur der Fall, denn aus der GINZBURG–LANDAU-Gleichung selbst folgt bis auf numerische Faktoren

$$(\xi_\omega\, q)^2 \approx \ln(T_{c0}/T_c)\,. \qquad (12)$$

Es ist nicht zu erkennen, daß dieser Gültigkeitsbereich durch Hinzunahme einiger weiterer Reihenglieder wesentlich erweitert wird. Bei Supraleitern mit Zusätzen („schmutzige“ Supraleiter) hat man eine Doppelreihe nach Potenzen von $(\zeta_\omega\, q)^2$ und ξ_ω/ζ_ω; die Aussagen über den Gültigkeitsbereich werden dadurch aber nicht geändert. Das etwa vorhandene Magnetfeld wurde bei diesen Überlegungen nicht berücksichtigt.

Die Diskussion des Gültigkeitsbereiches der (linearisierten und u. U. verallgemeinerten) GINZBURG–LANDAU-Gleichung ist damit nicht beendet. Wir müssen die nicht-verschwindende Reichweite des Integralkerns $K_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ genauer beachten. Sie darf im sauberen Fall wohl zu ξ_ω und im „schmutzigen Grenzfall“ ($\xi_\omega \gg l = \zeta_\omega$) zu $\sqrt{\xi_\omega\, l}$ abgeschätzt werden; im allgemeinen Fall dürfte sie zwischen diesen beiden Grenzen liegen. Der Punkt $\boldsymbol{r}$ darf sich der Oberfläche eines homogenen Leiters höchstens bis auf diese Reichweite nähern, wenn die GINZBURG–LANDAU-Gleichung gültig sein soll. Entscheidend ist dabei wohl der kleinste Wert von $|\omega|$ $(=\pi T_c)$. Wenn die Dicke einer Schicht nur von der Größenordnung der Reichweite des Integralkerns oder sogar kleiner ist, kann die GINZBURG–LANDAU-Gleichung überhaupt nicht angewandt werden. Dabei muß man beachten, daß die Reichweiten mit abnehmender Temperatur wachsen und für $T_c \to 0$ gegen unendlich gehen.

Es ist wohl zuerst von MAKI [8] bemerkt worden, daß die Reihenentwicklung des Nenners des WERTHAMERschen Integralkerns [Gl. (3)] im schmutzigen Grenzfall für alle Temperaturen $T_c \leqq T_{c0}$ abgebrochen werden darf

$$K_\omega(q) \approx \frac{\pi N}{|\omega|}\left[1 + \frac{\xi_\omega\, l}{3}\, q^2\right]^{-1}. \qquad (13)$$

Die Reihenentwicklung der rechten Seite von Gl. (13) nach Potenzen von q^2 stimmt nämlich in jeder Potenz bis auf Glieder der Ordnung l/ξ_ω mit der Entwicklung der rechten Seite von Gl. (3) überein. Die Bedingung des schmutzigen Grenzfalls ($l \ll \xi_\omega$) ist für genügend große ω allerdings nie erfüllt; auf diese grundsätzliche Schwierigkeit soll nicht eingegangen werden. Aus Gl. (13) folgt formal die Diffusionsnäherung von DE GENNES [10]; es ergibt sich nämlich die Differentialgleichung

$$\left(2\,|\omega| - \frac{v\, l}{3}\, \tilde{\boldsymbol{\partial}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\partial}}\right) K_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = 2\pi N\, \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\,. \qquad (14)$$

Besteht der Leiter aus einem einzigen homogenen Stück, so läßt sich hieraus eine Differentialgleichung für $\Delta(\boldsymbol{r})$ gewinnen, wie in Abschn. 5 im Anschluß an DE GENNES gezeigt werden soll. Um die Gültigkeitsgrenzen von Gl. (14) zu beurteilen, schreibt man in der Entwicklung des Nenners von $K_\omega(q)$ [rechte Seite von Gl. (13)] die nächsten Glieder hin; man erkennt, daß sich nur die sehr schwache Forderung $(l\, q)^2 \ll 1$ ergibt.

Soweit sind das alles (bis auf die Ersetzung von q durch einen eichinvarianten Differentialoperator) Folgerungen aus dem WERTHAMERschen Integralkern Gl. (3). Wesentliche Voraussetzung war die Isotropie des Streuquerschnitts. Man kann sich von dieser Voraussetzung freimachen; dies ist in der Literatur auch meist geschehen. Mittels der (nicht vollständig bewiesenen) Methode der Korrelationsfunktion werden diese Rechnungen in den Abschn. 2 bis 5 noch einmal durchgeführt. Neue Ergebnisse werden dabei nicht gewonnen. Es könnte trotzdem von Interesse sein, daß bekannte Resultate auf durchsichtige Weise nachgeprüft werden. Außerdem wird ein Verfahren bereitgestellt, das sich möglicherweise auf noch ungelöste Probleme anwenden läßt.

Die Rechnungen beschränken sich durchweg auf das Innere der Leiter; bis auf eine Ausnahme (in Abschn. 5) wird auf die schwierige Frage [11] der Rand- und Grenzbedingungen nicht eingegangen. Es gibt allerdings Fälle (H_{c3}, Proximity Effect), bei denen diese Bedingungen eine entscheidende Rolle spielen. Untersuchungen hierüber mittels der Methode der Korrelationsfunktion sind im Gange.

Die Überlegungen dieser Arbeit sind auf die unmittelbare Umgebung der Sprungtemperatur

[10] P. G. DE GENNES, Phys. kond. Materie **3**, 79 [1964].

[11] Vgl. hierzu A. A. ABRIKOSOV, Zh. Eksperim. Teor. Fiz. **47**, 720 [1964]; engl. Übersetzung: Soviet Phys.—JETP **20**, 480 [1965].

$[\Delta(\boldsymbol{r}) \to 0]$ beschränkt. In einer weiteren Arbeit dieser Reihe soll versucht werden, die Methode der Korrelationsfunktion auf nicht-infinitesimale $\Delta(\boldsymbol{r})$ auszudehnen.

2. Sauberer Supraleiter

In I wurde im Anschluß an DE GENNES [3] gezeigt, daß der Integralkern $K_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ in Gl. (1) durch ein LAPLACE-Integral über eine Korrelationsfunktion [Gl. (I. 16)] ausgedrückt werden kann. Es wurde zu begründen versucht, daß diese Korrelationsfunktion mit den Hilfsmitteln der klassischen Mechanik zu berechnen ist. Es wurde weiter gezeigt, daß sich die klassische Korrelationsfunktion als Integral über eine gewisse Verteilung im Phasenraum [Gl. (I. 43)] schreiben läßt. Die Verteilungsfunktion gehorcht einer BOLTZMANN-Gleichung [Gl. (I. 49)] und ist durch eine Anfangsbedingung [Gl. (I. 45)] gekennzeichnet.

Übt man die LAPLACE-Transformation bereits auf die Verteilungsfunktion aus [Gl. (I. 64), man beachte auch Gl. (I, 67)], so kann das Problem der Berechnung von $K_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ folgendermaßen formuliert werden. Es ist

$$K_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \frac{N(2\pi)^3}{4\pi} \oint g_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{r}')\, \mathrm{d}\Omega \qquad (15)$$

[vgl. Gl. (I. Z 3)]; dabei gehorcht $g_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{r}')$ im sauberen homogenen Leiter ohne Magnetfeld der Gleichung [12]

$$(2|\omega| + \boldsymbol{v}\cdot\partial)\, g_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{r}') = \frac{1}{(2\pi)^2}\, \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \qquad (16)$$

[vgl. Gl. (I. 66)]. Der Betrag des Vektors $\boldsymbol{v}$ ist gleich der FERMI-Geschwindigkeit v; in Gl. (15) wird über alle Richtungen dieses Vektors integriert. In einer weiteren Arbeit dieser Reihe hoffen wir zeigen zu können, daß hier der Differentialoperator ∂ in Gegenwart eines Magnetfeldes durch den eichinvarianten Differentialoperator $\tilde{\partial}$ [Gl. (8)] zu ersetzen ist; eine vorläufige Rechtfertigung dieser Regel wird in Anh. 1 versucht.

Gl. (16) kann symbolisch sofort gelöst werden

$$g_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{r}') = \frac{1}{(2\pi)^2}\, \frac{1}{2|\omega| + \boldsymbol{v}\cdot\tilde{\partial}}\, \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'); \qquad (17)$$

dieses Resultat wurde bereits von EILENBERGER [13] mittels eines anderen Rechenverfahrens gewonnen. Entwickelt man $g_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{r}')$ in eine Reihe nach Potenzen des eichinvarianten Differentialoperators

$$g_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{r}') = \sum_{l=0}^{\infty} g_\omega^{(l)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{r}'), \qquad (18)$$

so folgt aus Gl. (17)

$$g_\omega^{(l)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{r}') = \frac{1}{(2\pi)^2}\, \frac{1}{(2|\omega|)^{l+1}}\, (-\boldsymbol{v}\cdot\tilde{\partial})^l\, \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'). \qquad (19)$$

Der gesuchte Integralkern läßt sich ebenfalls in eine Reihe

$$K_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \sum_{l=0}^{\infty} K_\omega^{(l)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \qquad (20)$$

entwickeln mit

$$K_\omega^{(l)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \frac{N(2\pi)^3}{4\pi} \oint g_\omega^{(l)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{r}')\, \mathrm{d}\Omega\,. \qquad (21)$$

Setzt man hier Gl. (19) ein, so fallen zunächst die $K_\omega^{(l)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ mit ungeradem l fort. Ferner folgt nach Anh. 2, Gln. (A. 10) und (A. 11)

$$\begin{aligned}
K_\omega^{(0)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') &= \frac{\pi N}{|\omega|}\, \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'),\\
K_\omega^{(2)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') &= \frac{\pi N}{|\omega|}\, \frac{v^2}{3(2|\omega|)^2}\, \tilde{\partial}_j \tilde{\partial}_j\, \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'),\\
K_\omega^{(4)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') &= \frac{\pi N}{|\omega|}\, \frac{v^4}{3\cdot 5(2|\omega|)^4}\\
&\cdot (\tilde{\partial}_j \tilde{\partial}_j \tilde{\partial}_k \tilde{\partial}_k + \tilde{\partial}_j \tilde{\partial}_k \tilde{\partial}_j \tilde{\partial}_k + \tilde{\partial}_j \tilde{\partial}_k \tilde{\partial}_k \tilde{\partial}_j)\, \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}').
\end{aligned} \qquad (22)$$

Das Problem der richtigen Reihenfolge der eichinvarianten Operatoren $\tilde{\partial}_j$, von dem in Anschluß an Gl. (7) die Rede war, findet damit im sauberen Fall für 4 Operatoren seine definitive Lösung. Für den allgemeinen Term $K_\omega^{(2m)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ ergibt sich folgende Regel: Man entwickle $K_\omega(q)$ [Gl. (3)] für $1/l=0$ (sauberer Leiter!) in eine Reihe nach Potenzen von q^2

$$K_\omega(q) = \frac{2\pi N}{v\, q} \tan^{-1} \xi_\omega\, q = \frac{\pi N}{|\omega|} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[-(\xi_\omega\, q)^2]^m}{2m+1}. \qquad (23)$$

Bei fehlendem Magnetfeld, wenn es auf die Reihenfolge der Differentialoperatoren nicht ankommt, ersetze man $-q^2$ durch den LAPLACE-Operator Δ. Ist ein Magnetfeld vorhanden, so ersetze man $(-q^2)^m$ zunächst durch $2m$ Operatoren $\tilde{\partial}_j$, addiere dann alle Verjüngungen, die sich durch die Reihenfolge der Operatoren unterscheiden und dividiere durch die Anzahl $[=1\cdot 3 \cdot \ldots (2m-1)]$ der Summanden.

[12] Offenbar ließen sich die Faktoren 2π zwischen den Gln. (15) und (16) geschickter aufteilen; aber wir möchten die Bezeichnungen von I beibehalten.

[13] G. EILENBERGER, Z. Phys. **190**, 142 [1966].

Man ersetze also z. B.

$$q^4 \rightarrow \tfrac{1}{3}\,(\tilde{\partial}_j\,\tilde{\partial}_j\,\tilde{\partial}_k\,\tilde{\partial}_k + \tilde{\partial}_j\,\tilde{\partial}_k\,\tilde{\partial}_j\,\tilde{\partial}_k + \tilde{\partial}_j\,\tilde{\partial}_k\,\tilde{\partial}_k\,\tilde{\partial}_j). \tag{24}$$

Bei Ersetzung von $-q^6$ ergeben sich bereits 15 Summanden.

Bis einschließlich der vierten eichinvarianten Ableitungen stimmt unser Ergebnis mit dem von TEWORDT [5] überein.

3. Schmutziger Grenzfall

Bei Anwesenheit von Störatomen gilt statt Gl. (16) eine BOLTZMANN-Gleichung mit Streuterm

$$\begin{aligned}(2\,|\omega|+v\,n\,\sigma)\;& g_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v};\boldsymbol{r}') \\ & - v\,n \oint \frac{\mathrm{d}\sigma(\vartheta)}{\mathrm{d}\Omega}\, g_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v}';\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}\Omega' \\ & = \frac{1}{(2\,\pi)^2}\,\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') - \boldsymbol{v}\cdot\tilde{\partial}\, g_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v};\boldsymbol{r}')\,;\end{aligned} \tag{25}$$

[vgl. Gl. (I.66)]. Dabei ist n die Zahl der Störatome pro Volumen, $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega$ der differentielle und σ der integrierte Streuquerschnitt; ϑ ist der Winkel zwischen den Vektoren $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{v}'$. Macht man wieder gemäß Gl. (18) eine Entwicklung nach Potenzen des Differentialoperators $\tilde{\partial}$, so ergibt sich

$$\begin{aligned}(2\,|\omega|+v\,n\,\sigma)\;& g_\omega^{(l)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v};\boldsymbol{r}') \\ & - v\,n \oint \frac{\mathrm{d}\sigma(\vartheta)}{\mathrm{d}\Omega}\, g_\omega^{(l)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v}';\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}\Omega' \\ & = \begin{cases} \dfrac{1}{(2\,\pi)^2}\,\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') & \text{für } l=0\,, \\ -\boldsymbol{v}\cdot\tilde{\partial}\, g_\omega^{(l-1)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v};\boldsymbol{r}') & \text{für } l\geqq 1\,. \end{cases}\end{aligned} \tag{26}$$

Da die rechte Seite der Gleichung für $g_\omega^{(0)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v};\boldsymbol{r}')$ die Richtung des Geschwindigkeitsvektors $\boldsymbol{v}$ nicht enthält, wird man diese Funktion unabhängig von $\boldsymbol{v}$ ansetzen. Dann heben sich die Streuanteile gegeneinander fort und man findet wie im sauberen Fall

$$\begin{aligned} g_\omega^{(0)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v};\boldsymbol{r}') &= \frac{1}{(2\,\pi)^2}\,\frac{1}{2\,|\omega|}\,\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \\ &= g_\omega^{(0)}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,. \end{aligned} \tag{27}$$

Für die Funktion $g_\omega^{(1)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v};\boldsymbol{r}')$ macht man den Ansatz

$$g_\omega^{(1)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v};\boldsymbol{r}') = -a\,\boldsymbol{v}\cdot\tilde{\partial}\,g_\omega^{(0)}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'), \tag{28}$$

in dem nur die Konstante a zu berechnen ist. Unter Benutzung von Anh. 2, Gl. (A.17), findet man

$$(2\,|\omega|+v\,n(\sigma-\sigma^{(1)}))\,a=1 \tag{29}$$

mit

$$\sigma^{(1)} = \oint \frac{\mathrm{d}\sigma(\vartheta)}{\mathrm{d}\Omega}\,\cos\vartheta\,\mathrm{d}\Omega\,. \tag{30}$$

Beachtet man die Definition der Transport-Weglänge l_{tr}

$$l_{\text{tr}} = [n(\sigma-\sigma^{(1)})]^{-1} \tag{31}$$

und geht zum „schmutzigen Grenzfall" über (was an dieser Stelle zum ersten Mal geschieht!), so kann $2\,|\omega|$ in Gl. (29) vernachlässigt werden und es folgt

$$g_\omega^{(1)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v};\boldsymbol{r}') = -\frac{l_{\text{tr}}}{v}\,\boldsymbol{v}\cdot\tilde{\partial}\,g_\omega^{(0)}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'). \tag{32}$$

Die Bestimmungsgleichung für $g_\omega^{(2)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v};\boldsymbol{r}')$ lautet

$$(2\,|\omega|+v\,n\,\sigma)\,g_\omega^{(2)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v};\boldsymbol{r}') - v\,n\oint\frac{\mathrm{d}\sigma(\vartheta)}{\mathrm{d}\Omega}\,g_\omega^{(2)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v}';\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}\Omega' = \frac{l_{\text{tr}}}{v}\,v_i\,v_j\,\tilde{\partial}_i\,\tilde{\partial}_j\,g_\omega^{(0)}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'). \tag{33}$$

Da $g_\omega^{(2)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v};\boldsymbol{r}')$ in drehinvarianter Weise von dem Geschwindigkeitsvektor v_i und dem Tensor $\tilde{\partial}_i\,\tilde{\partial}_j\,g_\omega^{(0)}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$ abhängen wird, machen wir den Ansatz

$$g_\omega^{(2)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v};\boldsymbol{r}') = (b\,v_i\,v_j + c\,v^2\,\delta_{ij})\,\frac{l_{\text{tr}}}{v}\,\tilde{\partial}_i\,\tilde{\partial}_j\,g_\omega^{(0)}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{34}$$

mit gesuchten Konstanten b und c. Der Term mit c muß hinzugefügt werden, da δ_{ij} aus $v_i'\,v_j'$ bei Integration mit $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega$ entsteht [Gl. (A.18)]. Unter Benutzung von Gl. (A.18) folgt dann

$$(2\,|\omega|+v\,n\,\sigma)\,(b\,v_i\,v_j + c\,v^2\,\delta_{ij}) - \frac{v\,n}{2}\,[b(3\,\sigma^{(2)}-\sigma)\,v_i\,v_j + (b(\sigma-\sigma^{(2)}) + 2\,c\,\sigma)\,v^2\,\delta_{ij}] = v_i\,v_j \tag{35}$$

mit

$$\sigma^{(2)} = \oint\frac{\mathrm{d}\sigma(\vartheta)}{\mathrm{d}\Omega}\,\cos^2\vartheta\,\mathrm{d}\Omega\,. \tag{36}$$

Da die Tensoren $v_i\,v_j$ und δ_{ij} linear unabhängig sind, ergeben sich zwei lineare Gleichungen für b und c mit der Lösung

$$b = [2\,|\omega| + \tfrac{3}{2}\,v\,n(\sigma-\sigma^{(2)})]^{-1}, \qquad c = \frac{v\,n(\sigma-\sigma^{(2)})}{4\,|\omega|}\,b\,. \tag{37}$$

Im schmutzigen Grenzfall (jetzt zum zweiten Mal benutzt!) kann man in Gl. (34) b fortlassen und c vereinfachen zu

$$c = 1/6\,|\omega|\,. \tag{38}$$

Damit findet man aus Gl. (34)

$$g_\omega^{(2)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{r}') = \frac{v\,l_{\mathrm{tr}}}{6\,|\omega|}\,\tilde{\partial}\cdot\tilde{\partial}\,g_\omega^{(0)}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,. \tag{39}$$

Das Gleichungssystem (26) kann im schmutzigen Grenzfall nach derselben Methode rekursiv vollständig gelöst werden; man findet (mit ganzzahligem $m \geqq 0$)

$$g_\omega^{(2m)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{r}') = \left(\frac{v\,l_{\mathrm{tr}}}{6\,|\omega|}\,\tilde{\partial}\cdot\tilde{\partial}\right)^m g_\omega^{(0)}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,,\quad g_\omega^{(2m+1)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{r}') = -\,\frac{l_{\mathrm{tr}}}{v}\,\boldsymbol{v}\cdot\tilde{\partial}\,g_\omega^{(2m)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{r}')\,. \tag{40}$$

Hieraus berechnet man

$$K_\omega^{(2m)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \frac{\pi N}{|\omega|}\left(\frac{v\,l_{\mathrm{tr}}}{6\,|\omega|}\,\tilde{\partial}\cdot\tilde{\partial}\right)^m \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,,\qquad K_\omega^{(2m+1)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = 0\,. \tag{41}$$

Für $K_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ ergibt sich also einfach die formale Reihenentwicklung des MAKIschen[8] Ausdrucks

$$K_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \frac{\pi N}{|\omega|}\left[1 - \frac{v\,l_{\mathrm{tr}}}{6\,|\omega|}\,\tilde{\partial}\cdot\tilde{\partial}\right]^{-1} \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,. \tag{42}$$

Das entspricht Gl. (13), nur ist l durch l_{tr} ersetzt und $-q^2$ durch $\tilde{\partial}\cdot\tilde{\partial}$. Es tritt nicht die komplizierte Reihenfolge der eichinvarianten Operatoren $\tilde{\partial}$ auf wie im sauberen Fall (Abschn. 2); man vergleiche hierzu die Gln. (22) und (41).

Im Sinne der Erörterungen von Abschn. 1 ließe sich hier leicht die Diffusionsnäherung anschließen. Statt dessen soll in Abschn. 5 ein unabhängiger Beweis gegeben werden, der auch die Gültigkeitsgrenzen deutlicher erkennen läßt.

4. Allgemeiner Fall

Liegt nicht gerade der saubere ($n\,v\,\sigma \ll 2\,|\omega|$) oder schmutzige ($n\,v\,\sigma \gg 2\,|\omega|$) Grenzfall vor, so werden die Rechnungen viel komplizierter, sobald man über die niedrigsten $g_\omega^{(l)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{r}')$ bzw. $K_\omega^{(l)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ hinausgeht. Es gilt weiterhin Gl. (26). Nach der Schlußweise des Abschn. 3 folgt daraus $g_\omega^{(0)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{r}')$ gemäß Gl. (27) und $K_\omega^{(0)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ gemäß Gl. (22). Für $g_\omega^{(1)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{r}')$ bleiben die Gln. (28) und (29) unverändert gültig. Geht man aber nicht zum schmutzigen Grenzfall über, so folgt statt Gl. (32)

$$g_\omega^{(1)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{r}') = -\,\frac{1}{2\,|\omega| + v\,n\,(\sigma - \sigma^{(1)})}\,\boldsymbol{v}\cdot\tilde{\partial}\,g_\omega^{(0)}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,. \tag{43}$$

Damit hat man wieder

$$K_\omega^{(1)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = 0\,. \tag{44}$$

Überhaupt läßt sich das Verschwinden aller $K_\omega^{(2m+1)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ leicht allgemein einsehen (Anh. 2).

Für $g_\omega^{(2)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{r}')$ gilt

$$g_\omega^{(2)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{r}') = (b\,v_i\,v_j + c\,v^2\,\delta_{ij})\,\frac{1}{2\,|\omega| + v\,n\,(\sigma - \sigma^{(1)})}\,\tilde{\partial}_i\,\tilde{\partial}_j\,g_\omega^{(0)}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{45}$$

mit den Konstanten b und c nach Gl. (37). Letztlich interessiert

$$K_\omega^{(2)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \frac{N(2\,\pi)^3}{4\,\pi}\oint g_\omega^{(2)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}\Omega = N(2\,\pi)^3\,\frac{(b/3 + c)\,v^2}{2\,|\omega| + v\,n\,(\sigma - \sigma^{(1)})}\,\tilde{\partial}\cdot\tilde{\partial}\,g_\omega^{(0)}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{46}$$

[vgl. Gl. (A.10)] mit

$$b/3 + c = 1/6\,|\omega|\,. \tag{47}$$

Die Größe $\sigma^{(2)}$ hebt sich also fort und $K_\omega^{(2)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ läßt sich durch die Transport-Weglänge l_{tr} [Gl. (31)] ausdrücken

$$K_\omega^{(2)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \frac{\pi N}{|\omega|}\,\frac{v^2}{6\,|\omega|\,(2\,|\omega| + v/l_{\mathrm{tr}})}\,\tilde{\partial}\cdot\tilde{\partial}\,\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,. \tag{48}$$

Bis einschließlich der zweiten Ableitungen bestätigt man also Gl. (7), aber bei anisotroper Streuung ist die freie Weglänge l durch die Transport-Weglänge l_{tr} zu ersetzen. Das stimmt mit dem Resultat von GORKOV[7] überein.

Für die Funktion $g_\omega^{(3)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{r}')$ gilt die Gleichung

$$(2|\omega| + v\,n\,\sigma)\, g_\omega^{(3)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{r}') - v\,n \oint \frac{\mathrm{d}\sigma(\vartheta)}{\mathrm{d}\Omega}\, g_\omega^{(3)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}'; \boldsymbol{r}')\, \mathrm{d}\Omega'$$
$$= -(b\,v_i\,v_j\,v_k + c\,v^2\,v_i\,\delta_{jk}) \frac{1}{2|\omega| + v\,n(\sigma - \sigma^{(1)})} \tilde{\partial}_i\,\tilde{\partial}_j\,\tilde{\partial}_k\, g_\omega^{(0)}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') \tag{49}$$

mit b und c nach Gl. (37). Deshalb wird folgender Ansatz gemacht

$$g_\omega^{(3)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{r}') = -[d\,v_i\,v_j\,v_k + e\,v^2(v_i\,\delta_{jk} + v_j\,\delta_{ik} + v_k\,\delta_{ij})$$
$$+ f\,v^2\,v_i\,\delta_{jk}] \frac{1}{2|\omega| + v\,n(\sigma - \sigma^{(1)})} \tilde{\partial}_i\,\tilde{\partial}_j\,\tilde{\partial}_k\, g_\omega^{(0)}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'). \tag{50}$$

Hierbei sind d, e und f gesuchte Konstanten. Das Glied mit e ist erforderlich, da bei Integration mit $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega$ aus dem Tensor $v_i'\,v_j'\,v_k'$ eine Linearkombination aus $v_i\,v_j\,v_k$ und $v_i\,\delta_{jk} + v_j\,\delta_{ik} + v_k\,\delta_{ij}$ entsteht [Gl. (A.19)]. Setzt man Gl. (50) in Gl. (49) ein und vergleicht die Koeffizienten der verschiedenen Tensoren, so findet man mit $\sigma^{(3)}$ gemäß Gl. (A.25)

$$d = \left[2|\omega| + \frac{v\,n}{2}(2\,\sigma + 3\,\sigma^{(1)} - 5\,\sigma^{(3)})\right]^{-1} b, \quad e = \frac{v\,n(\sigma^{(1)} - \sigma^{(3)})}{2(2|\omega| + v\,n(\sigma - \sigma^{(1)}))}\, d, \quad f = \frac{c}{2|\omega| + v\,n(\sigma - \sigma^{(1)})}. \tag{51}$$

Mit $g_\omega^{(3)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{r}')$ nach Gl. (50) lautet die Gleichung für $g_\omega^{(4)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{r}')$ folgendermaßen

$$(2|\omega| + v\,n\,\sigma)\, g_\omega^{(4)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{r}') + v\,n \oint \frac{\mathrm{d}\sigma(\vartheta)}{\mathrm{d}\Omega}\, g_\omega^{(4)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}'; \boldsymbol{r}')\, \mathrm{d}\Omega'$$
$$= [d\,v_i\,v_j\,v_k\,v_l + e\,v^2\,(v_i\,v_j\,\delta_{kl} + v_i\,v_k\,\delta_{jl} + v_i\,v_l\,\delta_{jk}) \tag{52}$$
$$+ f\,v^2\,v_i\,v_j\,\delta_{kl}] \frac{1}{2|\omega| + v\,n(\sigma - \sigma^{(1)})} \tilde{\partial}_i\,\tilde{\partial}_j\,\tilde{\partial}_k\,\tilde{\partial}_l\, g_\omega^{(0)}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}').$$

$g_\omega^{(4)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{r}')$ soll nicht vollständiger bestimmt werden, als für die Berechnung von $K_\omega^{(4)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{r}')$ erforderlich ist. Es wird deshalb gesetzt

$$g_\omega^{(4)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{r}') = [g_{ijkl}(\boldsymbol{v}) + h_{ijkl}(\boldsymbol{v})] \frac{1}{2|\omega| + v\,n(\sigma - \sigma^{(1)})} \tilde{\partial}_i\,\tilde{\partial}_j\,\tilde{\partial}_k\,\tilde{\partial}_l\, g_\omega^{(0)}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'). \tag{53}$$

Die beiden Tensoren, die drehinvariant von der Richtung des Geschwindigkeitsvektors $\boldsymbol{v}$ abhängen, sind durch ihr Verhalten bei Vertauschung der Indizes gekennzeichnet: $g_{ijkl}(\boldsymbol{v})$ ist invariant gegenüber beliebigen Vertauschungen der Indizes j, k, l, während $h_{ijkl}(\boldsymbol{v})$ invariant ist gegenüber Vertauschung von i mit j und Vertauschung von k mit l. Für die Bestimmung von $K_\omega^{(4)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ wird benötigt

$$\frac{1}{4\pi} \oint g_{ijkl}(\boldsymbol{v})\, \mathrm{d}\Omega = \frac{g_{mmnn}}{15}(\delta_{ij}\,\delta_{kl} + \delta_{ik}\,\delta_{jl} + \delta_{il}\,\delta_{jk}), \qquad \frac{1}{4\pi} \oint h_{ijkl}(\boldsymbol{v})\, \mathrm{d}\Omega = \frac{h_{mmnn}}{9}\,\delta_{ij}\,\delta_{kl} \tag{54}$$

(siehe Anh. 2). Die doppelten Spuren auf den rechten Seiten sind von $\boldsymbol{v}$ unabhängig.

Auf der rechten Seite von Gl. (52) verhalten sich die Faktoren von d und e wie $g_{ijkl}(\boldsymbol{v})$ und der Faktor von f wie $h_{ijkl}(\boldsymbol{v})$. Diese Gleichung zerfällt daher in zwei Gleichungen

$$(2|\omega| + v\,n\,\sigma)\, g_{ijkl}(\boldsymbol{v}) - v\,n \oint \frac{\mathrm{d}\sigma(\vartheta)}{\mathrm{d}\Omega}\, g_{ijkl}(\boldsymbol{v}')\, \mathrm{d}\Omega' = d\,v_i\,v_j\,v_k\,v_l + e\,v^2(v_i\,v_j\,\delta_{kl} + v_i\,v_k\,\delta_{jl} + v_i\,v_l\,\delta_{jk}),$$
$$(2|\omega| + v\,n\,\sigma)\, h_{ijkl}(\boldsymbol{v}) - v\,n \oint \frac{\mathrm{d}\sigma(\vartheta)}{\mathrm{d}\Omega}\, h_{ijkl}(\boldsymbol{v}')\, \mathrm{d}\Omega' = f\,v^2\,v_i\,v_j\,\delta_{kl}. \tag{55}$$

Bildet man hier die entsprechenden Spuren und beachtet deren Unabhängigkeit von $\boldsymbol{v}$, so folgt

$$g_{mmnn} = (d + 5\,e) \frac{v^4}{2|\omega|} = \frac{v^4}{2|\omega|(2|\omega| + v\,n(\sigma - \sigma^{(1)}))(2|\omega| + \frac{3}{2}v\,n((\sigma - \sigma^{(2)}))},$$
$$h_{mmnn} = 3\,f \frac{v^4}{2|\omega|} = \frac{3\,v\,n(\sigma - \sigma^{(2)})\,v^4}{2(2|\omega|)^2(2|\omega| + v\,n(\sigma - \sigma^{(1)}))(2|\omega| + \frac{3}{2}v\,n((\sigma - \sigma^{(2)}))}. \tag{56}$$

Schließlich erhält man unter Benutzung von Gln. (53) und (54)

$$K_\omega^{(4)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \frac{\pi N}{|\omega|} \frac{v^4}{15} \frac{1}{2|\omega|(2|\omega| + v\,n(\sigma - \sigma^{(1)}))^2(2|\omega| + \frac{3}{2}v\,n(\sigma - \sigma^{(2)}))}$$
$$\cdot \left(\tilde{\partial}_i\,\tilde{\partial}_i\,\tilde{\partial}_k\,\tilde{\partial}_k + \tilde{\partial}_i\,\tilde{\partial}_k\,\tilde{\partial}_i\,\tilde{\partial}_k + \tilde{\partial}_i\,\tilde{\partial}_k\,\tilde{\partial}_k\,\tilde{\partial}_i + \frac{5\,v\,n(\sigma - \sigma^{(2)})}{4|\omega|}\,\tilde{\partial}_i\,\tilde{\partial}_i\,\tilde{\partial}_k\,\tilde{\partial}_k\right) \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'). \tag{57}$$

Die eichinvarianten Differentialoperatoren kommen hier sowohl in der Anordnung vor, in der sie im sauberen Fall auftreten [Gl. (22)], als auch in der des schmutzigen Grenzfalles [Gl. (41)]. Es ist eine gute Probe, daß sich beide Grenzfälle aus Gl. (57) durch Spezialisierung ableiten lassen. Für isotropen Streuquerschnitt ($\sigma^{(1)}=0$, $\sigma^{(2)}=\sigma/3$) und ohne Magnetfeld ($\tilde{\partial}=\partial$) stimmt Gl. (57) überein mit dem q^4-Term, der sich bei der Entwicklung des WERTHAMERschen Integralkerns Gl. (3) ergibt. Überhaupt kann kein Zweifel bestehen, daß auch die weiteren $K_\omega^{(2m)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ mit denjenigen übereinstimmen, die sich aus der Reihenentwicklung des WERTHAMERschen Kerns ergeben; die explizite Prüfung wird aber schon deswegen schwierig, weil diese Reihenentwicklung kompliziert gebaut ist. Es sollte andererseits angemerkt werden, daß in $K_\omega^{(2m)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ mit $m \geqq 2$) nicht nur der Streuquerschnitt σ und die Größe $\sigma^{(1)}$ auftreten, sondern auch $\sigma^{(l)}$ mit $l \geqq 2$. Setzt man in Gl. (57) $\sigma^{(2)}=\sigma/3$ wie bei isotropem Streuquerschnitt (bei dem allerdings $\sigma^{(1)}$ verschwindet), so erhält man Übereinstimmung mit dem Resultat von TEWORDT [14].

5. Diffusionsnäherung

Nach DE GENNES [10] kann die Sprungtemperatur und der Verlauf von $\Delta(\boldsymbol{r})$ im schmutzigen Grenzfall aus der Lösung eines Diffusionsproblems gefunden werden. Zum Beweis gehen wir aus von der BOLTZMANN-Gleichung [Gl. (25)]; allerdings schreibt man den Term mit Ableitung jetzt zweckmäßig auf die linke Seite. Die Funktion $g_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v};\boldsymbol{r}')$ wird nahezu isotrop (d. h. nahezu unabhängig von der Richtung des Geschwindigkeitsvektors $\boldsymbol{v}$) angenommen. Wir setzen

$$g_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v};\boldsymbol{r}') = h_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') + \hat{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{h}_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'). \tag{58}$$

Hierbei bedeutet $\hat{\boldsymbol{v}}$ den Einheitsvektor in Richtung $\boldsymbol{v}$. Gl. (58) stellt den Anfang einer Entwicklung von $g_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v};\boldsymbol{r}')$ nach Kugelfunktionen bezüglich $\hat{\boldsymbol{v}}$ dar. $|\boldsymbol{h}_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')|$ sei bereits klein gegen $|h_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')|$; die höheren Glieder sollen überhaupt fortgelassen werden können. Die Funktionen $h_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ und $\boldsymbol{h}_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ lassen sich aus $g_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v};\boldsymbol{r}')$ folgendermaßen gewinnen

$$\begin{aligned} h_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') &= \frac{1}{4\pi}\oint g_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v};\boldsymbol{r}')\,d\Omega,\\ \boldsymbol{h}_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') &= \frac{3}{4\pi}\oint \hat{\boldsymbol{v}}\, g_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v};\boldsymbol{r}')\,d\Omega. \end{aligned} \tag{59}$$

Aus $h_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ kann man wegen Gl. (15) sofort den Integralkern $K_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ erhalten. Deutet man $h_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ in Abhängigkeit von $\boldsymbol{r}$ als eine Teilchendichte, so stellt $v\,\boldsymbol{h}_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')/3$ den zugehörigen Teilchenstrom dar; natürlich handelt es sich in beiden Fällen eigentlich um LAPLACE-Transformierte dieser Größen.

Setzt man Gl. (58) in Gl. (25) ein und integriert über alle Richtungen von $\boldsymbol{v}$, so erhält man

$$2|\omega|\,h_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') + \frac{v}{3}\,\tilde{\partial}\cdot\boldsymbol{h}_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \frac{1}{(2\pi)^2}\,\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'). \tag{60}$$

Das ist nichts anderes als die LAPLACE-Transformierte der Kontinuitätsgleichung. Multipliziert man andererseits zunächst mit $\boldsymbol{v}$ und integriert dann über alle Richtungen, so ergibt sich

$$(2|\omega| + v\,n(\sigma-\sigma^{(1)}))\,\boldsymbol{h}_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') + v\,\tilde{\partial}\,h_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = 0. \tag{61}$$

Im schmutzigen Grenzfall darf in der Klammer der Summand $2|\omega|$ fortgelassen werden und man erhält die aus der Diffusionstheorie geläufige Beziehung zwischen Teilchenstrom und Gradient der Teilchendichte mit der Diffusionskonstanten $D = v\,l_{\mathrm{tr}}/3$. Eliminiert man in bekannter Weise den Teilchenstrom, so ergibt sich

$$(2|\omega| - \tfrac{1}{3}v\,l_{\mathrm{tr}}\tilde{\partial}\cdot\tilde{\partial})\,h_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \frac{1}{(2\pi)^2}\,\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'). \tag{62}$$

Von hier aus erhält man (bis auf die Ersetzung von l durch l_{tr}) sofort Gl. (14).

Es muß noch geprüft werden, unter welchen Bedingungen Gl. (58) gültig ist, d. h. wann das zweite Glied auf der rechten Seite klein ist gegen das erste, und die höheren Kugelfunktionen bezüglich $\boldsymbol{v}$ fortgelassen werden dürfen. Hierzu denken wir Gl. (61) mit $\Delta(\boldsymbol{r}')$ multipliziert und über $\boldsymbol{r}'$ integriert. Für eine Abschätzung wird dann $\tilde{\partial}$ durch $1/L$ ersetzt, wobei L eine Länge ist, auf der sich $\Delta(\boldsymbol{r})$ wesentlich ändert. Es folgt, daß $|\int \boldsymbol{h}_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\,\Delta(\boldsymbol{r}')\,d^3\boldsymbol{r}'|$ klein ist gegen $|\int h_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\,\Delta(\boldsymbol{r}')\,d^3\boldsymbol{r}'|$, falls $l_{\mathrm{tr}} \ll L$ gilt. Da L mindestens von der Größenordnung $\sqrt{l_{\mathrm{tr}}\,\xi_\omega}$ (für $|\omega| = \pi T_c$) sein dürfte, ist diese Bedingung im schmutzigen Grenzfall i. allg. erfüllt.

Die Randbedingungen an einer Oberfläche gegen das Vakuum oder gegen einen Isolator lassen sich im Rahmen der Diffusionsnäherung [Gl. (58)] leicht

[14] L. TEWORDT, Phys. Rev. **137**, A 1745 [1965]. Die Arbeit beschränkt sich nicht auf $\Delta(\boldsymbol{r}) \to 0$.

angeben, falls die Elektronen dort spiegelnd reflektiert werden. Liegt der Punkt $\boldsymbol{r}$ an der Oberfläche, so muß gelten

$$g_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_0; \boldsymbol{r}') = g_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_1; \boldsymbol{r}'), \tag{63}$$

wobei $\boldsymbol{v}_0$ in einer Einfallsrichtung und

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_0 - 2\,\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}_0) \tag{64}$$

(mit $\boldsymbol{n}$ als Flächennormalen) in der zugehörigen Reflexionsrichtung liegt. Man vergleiche hierzu I, Abschn. 4, insbesondere Gln. (I. 53) und (I. 54). Wegen Gl. (58) bedeutet das aber

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{h}_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = 0 \tag{65}$$

und aus Gl. (61) folgt dann

$$\boldsymbol{n}\cdot\tilde{\partial}\, h_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = 0 = \boldsymbol{n}\cdot\,\tilde{\partial}\, K_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \tag{66}$$

für $\boldsymbol{r}$ auf der Oberfläche und beliebiges $\boldsymbol{r}'$. Diese Gleichung besagt, daß die Normalkomponente des Teilchenstromes an der Oberfläche verschwindet. Das muß natürlich für beliebige Reflexionsbedingungen gelten, aber im allgemeinen bleibt Gl. (58) in der Nähe der Oberfläche nicht richtig.

De Gennes [10] hat gezeigt, daß die Formeln der Diffusionsnäherung im Falle eines homogenen Supraleiters (Kopplungskonstante g und Abschneideenergie überall ortsunabhängig) vereinfacht werden können. Man denkt sich zunächst ein vollständiges normiertes System von Eigenfunktionen der Eigenwertgleichung

$$-\,\tilde{\partial}\cdot\tilde{\partial}\, u_m(\boldsymbol{r}) = \lambda_m\, u_m(\boldsymbol{r}) \tag{67}$$

gegeben; dabei wird im Falle spiegelnd reflektierender Oberflächen die Randbedingung

$$\boldsymbol{n}\cdot\tilde{\partial}\, u_m(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{68}$$

gefordert [vgl. Gl. (66)]. Man sieht leicht, daß die Eigenwerte λ_m nicht negativ sein können. Wegen Gl. (14) kann der Integralkern $K_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ entwickelt werden

$$K_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = 2\pi N \sum_m \frac{u_m(\boldsymbol{r})\; u_m^*(\boldsymbol{r}')}{2\,|\,\omega\,| + \frac{1}{3}\, v\, l_{\mathrm{tr}}\, \lambda_m}\,. \tag{69}$$

Die Funktionen $u_m(\boldsymbol{r})$ sind also zugleich Eigenfunktionen von $K_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$

$$\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'\; K_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\; u_m(\boldsymbol{r}') = \frac{2\pi N}{2\,|\,\omega\,| + \frac{1}{3}\, v\, l_{\mathrm{tr}}\, \lambda_m}\, u_m(\boldsymbol{r}). \tag{70}$$

Wegen Gl. (1) wählt man jetzt die Lückenfunktion $\Delta(\boldsymbol{r})$ proportional zur Eigenfunktion $u_1(\boldsymbol{r})$ mit kleinstem Eigenwert λ_1 ($\geqq 0$), erhält für sie also eine Differentialgleichung, die der linearisierten Ginzburg–Landau-Gleichung sehr ähnlich sieht. Schneidet man die divergente Summe in Gl. (1) ab wie in Abschn. 1 wegen der in Wahrheit retardierten Wechselwirkung, so folgt

$$\ln\left(\frac{T_{\mathrm{c}0}}{T_{\mathrm{c}}}\right) = 2\pi\, T_{\mathrm{c}} \sum_\omega \left(\frac{1}{2\,|\,\omega\,|} - \frac{1}{2\,|\,\omega\,| + \frac{1}{3}\, v\, l_{\mathrm{tr}}\, \lambda_1}\right). \tag{71}$$

Die Summe ist wieder über positive und negative ω erstreckt; die rechte Seite läßt sich durch die logarithmische Ableitung der Γ-Funktion ausdrücken.

Gl. (71) kann auch aus Gl. (42) gewonnen werden. Zu dem Lösungsansatz Gl. (58) vergleiche man auch Gl. (40).

Anhang 1: Leiter im Magnetfeld

Die Methode der Korrelationsfunktion und die Anwendung der Boltzmann-Gleichung wurden für Situationen, die invariant gegen Zeitumkehr sind, in I begründet. Durch ein Magnetfeld wird die Invarianz gegen Zeitumkehr aufgehoben. Zwar bleibt

$$K_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \sum_{mn} \frac{w_m(\boldsymbol{r})\; w_m^*(\boldsymbol{r}')\, w_n^*(\boldsymbol{r}')\; w_n(\boldsymbol{r})}{(\eta_m + i\,\omega)\;(\eta_n - i\,\omega)} \tag{A.1}$$

[vgl. Gl. (I. 7)] gültig, aber der Übergang zu Gl. (I. 10) und damit die Rechtfertigung von Gl. (I. 16) sind nicht mehr möglich. Es entfällt daher der unmittelbare Zusammenhang des Integralkerns $K_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ mit einer klassischen Verteilungsfunktion, die der Boltzmann-Gleichung gehorcht.

Wir stellen zunächst einige allgemeine Eigenschaften von $K_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ zusammen. Aus Gl. (A. 1) folgt durch Vertauschung der Summationsindizes m und n auch jetzt

$$K_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = K_{-\omega}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \tag{A.2}$$

[vgl. Gl. (I. 8)]. Ferner ergibt sich ohne Benutzung der Invarianz gegen Zeitumkehr aus Gl. (A. 1)

$$K_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = K_\omega^*(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}), \tag{A.3}$$

was an Stelle von Gl. (I. 9) tritt; der Integralkern ist also nicht länger symmetrisch, sondern nur noch hermitisch. Gl. (I. 12) bleibt nicht richtig.

Erst jetzt machen wir explizit von der Anwesenheit eines Magnetfeldes Gebrauch. Bei einer Umeichung des Vektorpotentials

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \to \boldsymbol{A}'(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) + \operatorname{grad} U(\boldsymbol{r}) \tag{A.4}$$

multiplizieren sich die Ein-Teilchen-Funktionen mit einem Phasenfaktor

$$w_m(\boldsymbol{r}) \to w_m'(\boldsymbol{r}) = w_m(\boldsymbol{r}) \exp\{-i\, e\, U(\boldsymbol{r})\} \tag{A.5}$$

(Elektronenladung gleich $-e$), während sich die Eigenwerte η_m nicht ändern. Damit folgt aus Gl. (A. 1)

$$K_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \to K'_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = K_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \exp\{2\,i\,e(U(\boldsymbol{r}') - U(\boldsymbol{r}))\}, \quad \text{(A. 6)}$$

was mit der Hermitizität [Gl. (A. 3)] natürlich verträglich ist. Das zugehörige Transformationsverhalten der Lückenfunktion

$$\Delta(\boldsymbol{r}) \to \Delta'(\boldsymbol{r}) = \Delta(\boldsymbol{r}) \exp\{-2\,i\,e\,U(\boldsymbol{r})\} \quad \text{(A. 7)}$$

läßt sich ebenfalls verhältnismäßig leicht beweisen. Gl. (15) legt folgendes Transformationsverhalten der Funktion $g_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v};\boldsymbol{r}')$ nahe

$$g_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v};\boldsymbol{r}') \to g'_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v};\boldsymbol{r}') = g_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v};\boldsymbol{r}') \exp\{2\,i\,e(U(\boldsymbol{r}') - U(\boldsymbol{r}))\}; \quad \text{(A. 8)}$$

es gilt also

$$\exp\{2\,i\,e(U(\boldsymbol{r}') - U(\boldsymbol{r}))\}\,\partial\,g_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = (\partial + 2\,i\,e\,\mathrm{grad}\,U(\boldsymbol{r}))\,g'_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'). \quad \text{(A. 9)}$$

Ohne Magnetfeld liegen diejenigen Verhältnisse vor, die in I untersucht wurden. Wir fragen daher nach einer Verallgemeinerung der BOLTZMANN-Gleichung [Gl. (I. 66)], die mit dem Transformationsverhalten Gl. (A. 8), d. h. mit Gl. (A. 9), verträglich ist und für $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \equiv 0$ in die frühere BOLTZMANN-Gleichung übergeht. Offenbar wird das sofort erreicht, wenn man den Differentialoperator ∂ ersetzt durch den eichinvarianten Operator $\tilde{\partial}$ [Gl. (8)]. Ähnlich wie in I, Abschn. 4, zeigt man, daß die Hermitizität [Gl. (A. 3)] aus der abgeänderten BOLTZMANN-Gleichung und den Randbedingungen Gln. (I. 53) und (I. 57) bewiesen werden kann.

Diese Erörterungen ersetzen nicht einen vollständigen Beweis, den wir bei späterer Gelegenheit nachzutragen hoffen.

Anhang 2: Integration über alle Richtungen

Entwickelt man die Funktion $g_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v};\boldsymbol{r}')$ wie im Hauptteil nach der Zahl der Ableitungen und geht dann mittels Gl. (15) zu $K_\omega(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ über, so treten Integrale der folgenden Form

$$\frac{1}{4\pi}\oint v_i\,v_j\,\mathrm{d}\Omega = \frac{v^2}{3}\,\delta_{ij}, \quad \text{(A. 10)}$$

$$\frac{1}{4\pi}\oint v_i\,v_j\,v_k\,v_l\,\mathrm{d}\Omega = \frac{v^4}{15}\,(\delta_{ij}\,\delta_{kl} + \delta_{ik}\,\delta_{jl} + \delta_{il}\,\delta_{jk}) \quad \text{(A. 11)}$$

usw. auf. Man überzeugt sich leicht durch Ausführung der Transformation $\boldsymbol{v} \to -\boldsymbol{v}$, daß alle Integrale mit einer ungeraden Anzahl von Faktoren im Integranden verschwinden.

Man beweist die Gln. (A. 10) und (A. 11) und weitere entsprechende Beziehungen, indem man jeweils von der Tensoreigenschaft und zwei Invarianzeigenschaften der linken Seite, nämlich der Drehinvarianz und der Invarianz gegen Indexvertauschung, Gebrauch macht. Die rechte Seite muß dieselbe Tensoreigenschaft und dieselbe Invarianzeigenschaft besitzen. Man setzt also etwa

$$\frac{1}{4\pi}\oint v_i\,v_j\,\mathrm{d}\Omega = \alpha\,\delta_{ij}, \quad \text{(A. 12)}$$

wobei nur noch die Konstante α zu bestimmen ist. In Gl. (A. 12) wählt man jetzt $j=i$ und summiert über i unter Beachtung von

$$v_i\,v_i = v^2 = \mathrm{const}, \quad \delta_{ii} = 3. \quad \text{(A. 13)}$$

Es folgt sofort $\alpha = v^2/3$. (A. 14)

In Zusammenhang mit Gl. (53) tritt ein etwas anderes Problem auf. Man weiß, daß die Tensoren $g_{ijkl}(\boldsymbol{v})$ und $h_{ijkl}(\boldsymbol{v})$ drehinvariant von $\boldsymbol{v}$ abhängen und bestimmte Invarianzeigenschaften bezüglich Indexvertauschung besitzen. Da z. B. $g_{ijkl}(\boldsymbol{v})$ invariant gegenüber Vertauschung der Indizes j, k und l sein soll, muß gelten

$$\frac{1}{4\pi}\oint g_{ijkl}(\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}\Omega = \beta(\delta_{ij}\,\delta_{kl} + \delta_{ik}\,\delta_{jl} + \delta_{il}\,\delta_{jk}), \quad \text{(A. 15)}$$

wobei nur die Konstante β zu bestimmen ist. Jetzt setzt man $j=i$ und $l=k$ und summiert. Beachtet man noch, daß $g_{iikk}(\boldsymbol{v})$ nicht mehr von $\boldsymbol{v}$ (in drehinvarianter Weise!) abhängen kann, so folgt

$$\frac{1}{4\pi}\oint g_{iikk}(\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}\Omega = g_{iikk} = 15\,\beta. \quad \text{(A. 16)}$$

Hieraus kann β sofort bestimmt werden.

Bei Aufstellung der Gleichungen für die einzelnen Funktionen $g_\omega^{(l)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v};\boldsymbol{r}')$ in den Abschn. 3 und 4 sind Integrale der folgenden Form zu berechnen

$$\oint \frac{\mathrm{d}\sigma(\vartheta)}{\mathrm{d}\Omega}\,v_i'\,\mathrm{d}\Omega' = \sigma^{(1)}\,v_i, \quad \text{(A. 17)}$$

$$\oint \frac{\mathrm{d}\sigma(\vartheta)}{\mathrm{d}\Omega}\,v_i'\,v_j'\,\mathrm{d}\Omega' = \tfrac{1}{2}\,(3\,\sigma^{(2)} - \sigma)\,v_i\,v_j + \tfrac{1}{2}\,(\sigma - \sigma^{(2)})\,v^2\,\delta_{ij}, \quad \text{(A. 18)}$$

$$\oint \frac{\mathrm{d}\sigma(\vartheta)}{\mathrm{d}\Omega}\,v_i'\,v_j'\,v_k'\,\mathrm{d}\Omega' = \tfrac{1}{2}\,(5\,\sigma^{(3)} - 3\,\sigma^{(1)})\,v_i\,v_j\,v_k + \tfrac{1}{2}\,(\sigma^{(1)} - \sigma^{(3)})\,v^2(v_i\,\delta_{jk} + v_j\,\delta_{ik} + v_k\,\delta_{ij}). \quad \text{(A. 19)}$$

Zum Beweis von Gl. (A. 17) macht man sich klar, daß die linke Seite ein Vektor ist, der drehinvariant (da ϑ den Winkel zwischen $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{v}'$ bedeutet) von $\boldsymbol{v}$ abhängt. Es muß also gelten

$$\oint \frac{\mathrm{d}\sigma(\vartheta)}{\mathrm{d}\Omega} v_i' \mathrm{d}\Omega' = \gamma\, v_i\,. \tag{A. 20}$$

Um die Konstante γ zu bestimmen, multipliziert man skalar mit $\boldsymbol{v}$. Auf der linken Seite tritt dann die Größe $\sigma^{(1)}$ [Gl. (30)] auf und man erhält

$$\sigma^{(1)} = \gamma\,. \tag{A. 21}$$

Um Gl. (A. 18) zu beweisen, beachtet man, daß die linke Seite einen Tensor zweiter Stufe darstellt, der drehinvariant von $\boldsymbol{v}$ abhängt und invariant gegen Vertauschung der Indizes i und j ist. Deshalb wird gesetzt

$$\oint \frac{\mathrm{d}\sigma(\vartheta)}{\mathrm{d}\Omega} v_i' v_j' \,\mathrm{d}\Omega' = \delta\, v_i v_j + \varepsilon\, v^2 \delta_{ij}\,. \tag{A. 22}$$

Man bildet jetzt einerseits die Spur und findet

$$\sigma = \delta + 3\,\varepsilon\,. \tag{A. 23}$$

Andererseits multipliziert man mit $v_i v_j$ und summiert. Links tritt dann die Größe $\sigma^{(2)}$ [Gl. (36)] auf

$$\sigma^{(2)} = \delta + \varepsilon\,. \tag{A. 24}$$

Aus den Gln. (A. 23) und (A. 24) kann man die Konstanten δ und ε bestimmen und in Gl. (A. 22) einsetzen. Ebenso beweist man Gl. (A. 19) mit

$$\sigma^{(3)} = \oint \frac{\mathrm{d}\sigma(\vartheta)}{\mathrm{d}\Omega} \cos^3\vartheta \,\mathrm{d}\Omega\,. \tag{A. 25}$$

Die Methode der Korrelationsfunktion in der Theorie der Supraleitung

III. Ableitung der Boltzmann-Gleichung

Gerhart Lüders

Institut für Theoretische Physik der Universität Göttingen

(Z. Naturforschg. **21 a**, 1425—1436 [1966]; eingegangen am 3. Juni 1966)

The Boltzmann equation, which was conjectured and applied in previous papers of this series, is derived from an integral equation given by Edwards, Abrikosov, and Gorkov. In an appendix, we present the quasi-classical approximation for the calculation of Green functions.

Die Sprungtemperatur T_c eines Supraleiters und der Verlauf der Lückenfunktion $\Delta(\boldsymbol{r})$ lassen sich bei einem Übergang zweiter Ordnung aus einer linearen Integralgleichung

$$\Delta(\boldsymbol{r}) = g\, T_c \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \sum_{\omega} K_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\, \Delta(\boldsymbol{r}') \tag{1}$$

bestimmen. Hierbei ist g die Kopplungskonstante der BCS-Theorie und ω durchläuft alle positiven und negativen ungeradzahligen Vielfachen von πT_c. Nach de Gennes [1] kann $K_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ als Laplace-Transformierte einer Korrelationsfunktion geschrieben werden, wenn das physikalische System invariant gegen Zeitumkehr ist. In der ersten Arbeit dieser Reihe [2] wurde diese Beziehung kritisch diskutiert. Es ergab sich dabei, daß $K_\omega(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ genauer aus dem (zunächst nicht präzis definierten) langsam veränderlichen Anteil der Korrelationsfunktion zu berechnen ist. Es konnte weiter gezeigt werden, daß im homogenen reinen Leiter (d. h. für freie Elektronen) genau die klassisch auf der mikrokanonischen Gesamtheit berechnete Korrelationsfunktion einzusetzen ist. Es wurde schließlich die Vermutung ausgesprochen, daß in allen Fällen die klassische Korrelationsfunktion zu verwenden ist; aber ein Beweis konnte damals nicht gegeben werden.

In I wurde ferner gezeigt, daß sich die dort genau erklärte klassische Korrelationsfunktion als Impulsraum-Integral über eine Verteilungsfunktion im Phasenraum schreiben läßt, die sich aus einem gegebenen Anfangszustand nach den Gesetzen der klassischen Mechanik entwickelt. Sind Fremdatome in dem Leiter statistisch unabhängig verteilt, so gehorcht diese Verteilungsfunktion offenbar der Boltzmann-Gleichung [Gl. (I. 49)]. Statt zu beweisen, daß

[1] P. G. de Gennes, Rev. Mod. Phys. **36**, 225 [1964].

[2] G. Lüders, Z. Naturforschg. **21 a**, 680 [1966]. Diese Arbeit, die sich im Titel nicht als erste der Reihe zu erkennen gibt, soll im folgenden als I zitiert werden. Gleichungen aus dieser Arbeit werden entsprechend als Gl. (I. 49) usw. angegeben.